数理解析研究所講究録
691巻 1989年 63-66

確率行列に対する一評価と境界要素近似への応用.

阪大基礎工　早川　款達郎　(Kantaro Hayakawa)

§0. 記号と結果の記述.

実N次列ベクトル空間をV_N, その元を$\vec{u}=(u_j)_{j\downarrow}$等とかく.

第j成分が1で他の成分が0であるV_Nの元を$\vec{e}^{\,j}$, 全ての成分が1である元を$\vec{1}$とかく.

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_N$ に対し次の様に ノルム と duality を与える.

$$|\vec{u}|_1 = \sum_j |u_j| \quad , \quad |\vec{v}|_\infty = \mathrm{Max}\{|v_j| : j\}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_j u_j v_j$$

実N次正方行列 $A = (a_{j,k})_{\substack{j\downarrow 1,\dots,N \\ k\to 1,\dots,N}}$ は次の条件を満たすものとする.

(仮定1) $\exists \varepsilon_0 > 0 \ \exists p \geq 1 \quad \varepsilon_0 N^{-1} \leq a_{j,k} \leq \varepsilon_0 p N^{-1} \quad \forall j, k$

(仮定2) $A\vec{1} = \vec{1}$

上の2つの仮定からAは確率行列で成分が全て正であるから既約になる. 次の一連の事実が容易にわかる.

1) $|A\vec{u}|_\infty \leq |\vec{u}|_\infty \quad \forall \vec{u} \in V_N$

2) 1はAのPerron根であり ${}^tA$ のPerron根でもある.

3）　1 は単根であり．1 に属する A, ${}^tA$ の固有ベクトルとして成分が全て正であるものがとれる．(Perron-Frobenius の定理)

$\vec{1}$ は A の才の固有ベクトルである．${}^tA$ の才の固有ベクトルを $\vec{\mu} = (\mu_j)_{j\downarrow}$ とおき，$|\vec{\mu}|_1 = 1$ と正規化しておく．

$$W_{\vec{1}} = \{\vec{u} \in V_N : \langle \vec{1}, \vec{u} \rangle = 0\}$$
$$W_{\vec{\mu}} = \{\vec{v} \in V_N : \langle \vec{v}, \vec{\mu} \rangle = 0\}$$
とおく．

4）　$A W_{\vec{\mu}} \subset W_{\vec{\mu}}$　,　${}^tA W_{\vec{1}} \subset W_{\vec{1}}$

我々の主目的は次の定理である．

定理．　A が（仮定1）（仮定2）を満たせば次のことが成立する．

i)　$|{}^tA\vec{v}|_1 \leqq (1-\varepsilon_0)|\vec{v}|_1 \quad \forall \vec{v} \in W_{\vec{1}}$

ii)　$|A\vec{u}|_\infty \leqq (1-p^{-1})|\vec{u}|_\infty \quad \forall \vec{u} \in W_{\vec{\mu}}$

iii)　$|(I-A)\vec{w}|_\infty \leqq (2p)^{-1}|\vec{w}|_\infty \quad \forall \vec{w} \in W_{\vec{1}}$

§1.　証明の概略．

補題1.　$\vec{\mu}$ に対して．$\varepsilon_0 N^{-1} \leqq \mu_j \leqq \varepsilon_0 p N^{-1}$ が成立する．

補題2.　$\vec{v} \in W_{\vec{1}}$ に対し $T\vec{v} = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{\mu} \rangle \langle \vec{1}, \vec{\mu} \rangle^{-1} \vec{1}$ とおくと $T\vec{v} \in W_{\vec{\mu}}$ となり $\vec{v} = T\vec{v} - \langle \vec{1}, T\vec{v} \rangle N^{-1} \vec{1}$ である．

i) の証明．

$\vec{v} \in W_{\vec{1}}$ であれば $\sum_k v_k = 0$ である．

$$|{}^tA\vec{v}|_1 = \sum_j |\sum_k a_{kj} v_k| = \sum_j |\sum_k (a_{kj} - \varepsilon_0 N^{-1}) v_k|$$

$$\leq \sum_j \sum_k (a_{k,j} - \varepsilon_0 N^{-1}) |v_k| = (1-\varepsilon_0) |\vec{v}|_1 .$$

ii) の証明.

$\vec{u} \in W_{\vec{\mu}}$ とすれば $\langle A\vec{u}, \vec{\mu} \rangle = 0$ となる.

$$|A\vec{u}|_\infty = \mathrm{Max}_j | \langle A\vec{u}, \vec{e}^j \rangle |$$

$$= \mathrm{Max}_j | \langle A\vec{u}, \vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu} \rangle |$$

$$= |\vec{u}|_\infty \ \mathrm{Max}_j \ | {}^tA(\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu})|_1 .$$

一方 $|{}^tA(\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu})|_1 = |{}^tA\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu}|_1$

$$= \sum_k |a_{j,k} - p^{-1}\mu_k|$$

補題1と(仮定1)より $a_{j,k} \geq \varepsilon_0 N^{-1} \geq p^{-1}\mu_k \quad \forall j,k$

従って $|{}^tA(\vec{e}^j - p^{-1}\vec{\mu})|_1 = \sum_k a_{j,k} - p^{-1}|\vec{\mu}|_1 = 1 - p^{-1}$.

iii) の証明.

$\forall \vec{u} \in W_{\vec{\mu}}$ に対して $|(I-A)\vec{u}|_\infty \geq p^{-1}|\vec{u}|_\infty$ となる.

そこで $\forall \vec{w} \in W_{\vec{1}}$ に対して $T\vec{w} \in W_{\vec{\mu}}$ であるから

$$|(I-A)\vec{w}|_\infty = |(I-A)T\vec{w}|_\infty \geq p^{-1}|T\vec{w}|_\infty .$$

補題2より $|\vec{w}|_\infty \leq 2|T\vec{w}|_\infty$ が出るから.

$$|(I-A)\vec{w}|_\infty \geq (2p)^{-1}|\vec{w}|_\infty \quad \forall \vec{w} \in W_{\vec{1}} \quad \text{となる.}$$

§2. 応用.

本研究会の磯祐介氏の講演において, 境界要素解の誤差, $\tilde{e}_h$ は. $K_h \tilde{e}_h = \tilde{f}_h$ をみたすものとして与えられる. 境界要素空間の取り方を適当なものにすると, $\langle \tilde{e}_h, \vec{1} \rangle = 0$ と

なる.

K_h は $Ku(\xi) = \frac{1}{2}u(\xi) + p.v\int_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial n}(\xi, \eta)\, u(\eta)\, d\sigma_\eta$

なる積分作用素の離散化であることから,

$K_h = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}A_h$

とおいて見ると, A_h が(仮定1),(仮定2) を満たすことになるから定理 iii) より

$|\tilde{e}_h|_\infty \leqq \mathcal{M}p|\tilde{f}_h|_\infty$

が得られ, この評価が. 磯氏の近似解の誤差の評価を高めることにつながる.

又. 定理 i),ii) は確率行列Aの固有値の分布に対して,若干の情報を与える.